

А. В. Асеев¹, А. А. Макаров²

О ВИЗУАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ИХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ*

¹ Акционерное общество «Равенство», Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, Промышленная ул. 19

² Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Целью данной работы является описание визуализации математической модели напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочечных конструкций, подкрепленных ребрами переменной высоты и имеющих в качестве составных частей элементы цилиндрической, конической и конической оболочек. Разработанный программный модуль может быть использован при проектировании и расчете тонкостенных оболочечных конструкций, подкрепленных ребрами переменной высоты, в научных исследованиях, связанных с нелинейными проблемами деформирования тонкостенных конструкций, их визуализации и анимации процессов деформирования, а также для анализа приближенных решений, полученных коммерческими программными продуктами для инженерных расчетов. Библиогр. 16 назв. Ил. 9.

Ключевые слова: тонкие оболочки, подкрепленные оболочки, ребра жесткости переменной высоты, устойчивость, прочность, напряженно-деформированное состояние, визуализация оболочечных конструкций.

А. В. Асеев¹, А. А. Макаров²

ON VISUALIZATION OF SOME THIN SHELLS AND THEIR STRESS-STRAIN STATE

¹ Joint Stock Company "Rawenstvo", 19, Promishlennaya ul., St. Petersburg, 198095, Russian Federation

² St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Shells that are reinforced by ribs of variable height can reduce harmful stress concentrations for analysis of the stress-strain state of a stiffened structure it is necessary to know not only the greatest deflection and the maximum normal stress but also to gain a picture of the deflection and the stress intensity across the shell. Moreover, the construction of the field deflection of the shell from the surface structure (and not from a plane) can be more clearly reflect the deformation process. This can be achieved by developing special software for further practical use and that has a convenient graphical interface to provide the results of calculations in a user-friendly form. The purpose of this paper is to describe imaging of a mathematical model of the stress-strain state of thin-walled shell structures that are reinforced by ribs of variable height. The results that are described in this paper have been obtained using the developed software module, which can be used in the practice of calculating shell structures in their design,

Асеев Алексей Владимирович — ведущий разработчик; alexey.aseev@yandex.ru

Макаров Антон Александрович — доктор физико-математических наук, профессор; a.a.makarov@spbu.ru

Aseev Alexey Vladimirovich — leading researcher; alexey.aseev@yandex.ru

Makarov Anton Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences; a.a.makarov@spbu.ru

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 8.1046.2011) и Президента РФ (грант № МД-6766.2015.9).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

as well as in scientific research related to the problems of nonlinear deformation of thin-walled structures. The geometric shape of the shell is defined using Lamé parameters, and the shell itself and its supporting ribs are imaged as a shell of step-variable thickness. The contact of rib and shell occurs on the band that more accurately reflects the actual work construction. Refs 16. Figs 9.

Keywords: thin shells, stability and strength of the shells, visualization of thin shells, reinforced shells, ribs of variable height.

1. Введение. Современная конструктивная геометрия предоставляет множество инструментов для эффективного проектирования, анализа и изготовления форм сложной геометрии. Тонкие оболочки выдерживают значительные нагрузки при минимальной толщине и позволяют внедрять разнообразные архитектурные формы при проектировании конструкций различного вида. Исследование деформации, прочности и устойчивости тонких оболочек с помощью математических пакетов прикладных программ общего назначения позволяет проводить достаточно сложные расчеты, однако для практического применения инженерами не всегда является удобным. Используемые в коммерческих программных комплексах алгоритмы скрыты от пользователя, что затрудняет эффективное и полное применение встроенных функций. Для проведения вычислений может потребоваться 3D-модель изучаемой конструкции, при этом геометрическую модель конструкции целесообразно создавать в специализированных CAD/CAM-системах проектирования, имеющих свои особенности и неточности при построении поверхностей (см., например, [1–3]). Также могут возникать сложности с заданием геометрической формы оболочек и подкрепляющих ее ребер или ослабляющих вырезов. Такие задачи приходится решать при помощи методов компьютерной геометрии, позволяющих графически представить (визуализировать) конструкционные поверхности сложной геометрии, их стыковку и сочленение (детали см., в частности, в [4]). Геометрическое моделирование широко применяется при проектировании и визуализации тонкостенных конструкций (подробнее см. [5–10]). Для анализа напряженно-деформированного состояния подкрепленной или ослабленной конструкции необходимо знать не только максимальный прогиб и наибольшее нормальное напряжение, но и картину прогибов и интенсивности напряжений по всей оболочке. Полученных числовых данных, как правило, оказывается недостаточно. При этом возникает необходимость оценить форму потери устойчивости и визуализировать поведение оболочки. Такая визуализация процесса деформирования позволяет инженеру наиболее наглядно оценить напряженно-деформированное состояние конструкции. В ряде случаев целесообразно откладывать поле напряжений и поле прогибов от поверхности оболочки, а не от плоскости (с возможностью их совместного отображения). Например, это особенно важно при сложной форме контура конструкции и различных способах его закрепления, для более наглядного отражения процесса деформирования оболочки при потере устойчивости и дальнейшего просмотра анимации процесса деформирования. Это все можно учесть, разрабатывая специальные пакеты прикладных программ для инженерного анализа, использующих алгоритмы расчета (в том числе и параллельные), основанные на математических моделях, учитывающих особенности сложной структуры и различные свойства конструкционного материала, позволяющих проектировать легкие конструкции, которые обладают высокой прочностью и коррозионной стойкостью. Отметим также, что такие пакеты программ пригодны для анализа приближенных решений, полученных коммерческими программными продуктами для инженерных расчетов. Предлагаемая работа продолжает исследования нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины (см. [9, 11, 12]).

Цель данной работы — описание визуализации математической модели напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочечных конструкций, подкрепленных ребрами переменной высоты и имеющих в качестве составных частей элементы цилиндрической, катеноидной и конической оболочек. Результаты работы подробно демонстрируются на примере исследования длинной панели ребристой цилиндрической оболочки (см. п. 4).

2. О системе визуализации модели конструкции оболочечного типа.

С точки зрения визуализации геометрическая модель тонкой оболочки состоит из следующих составляющих: модель срединной поверхности, модель лицевой поверхности (верхней и нижней) и, если оболочка не замкнута, 4 модели боковых поверхностей (граничных контуров). Срединная поверхность является основной поверхностью, описывающей геометрию оболочки (см. [9]), поэтому схема ее построения представляет особый интерес.

Трехмерный объект визуализируется путем построения его 3D-модели и последующей ее подачи на вход графического конвейера. Приведенные в данной работе результаты получены при помощи программного модуля, разработанного в среде Microsoft .NET Framework (язык C# 4.0). В качестве графического конвейера использовался DirectX, а программной оболочки DirectX для платформы .NET — SlimDX.

Для визуализации оболочечных конструкций в разработанном программном модуле применяются две системы координат:

- мировая система координат (x, y, z) — трехмерная декартова система координат, используемая в DirectX, описывающая положение объектов на сцене, в которой строится модель оболочки;
- локальная система координат оболочки (x^1, x^2, x^3) — криволинейная система координат, отложенная на оболочке, в которой задаются прогибы и информация о положении ребер жесткости.

На рис. 1 схематично изображена панель тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Здесь и далее l_0 — смещение оболочки относительно начала координат вдоль оси x^1 . Величины $l_1 - l_0, l_2$ — линейные размеры протяженности конструкции в направлениях x^1, x^2 соответственно, ось x^3 направлена по нормали к поверхности.

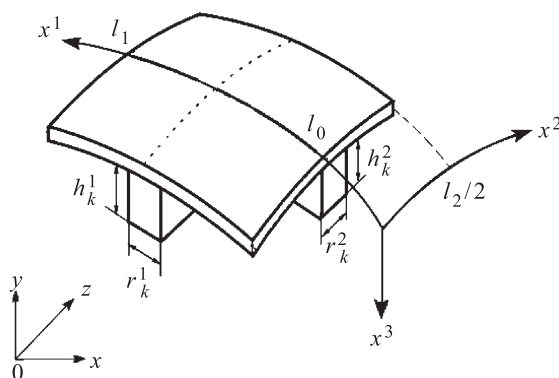


Рис. 1. Локальная и глобальная системы координат на оболочке ступенчато-переменной толщины

Объяснение в тексте

Для описания 3D-модели применяется полигональная модель (в ней единицей информации является вершина). В зависимости от желаемых эффектов визуализации у вершины может быть много различных атрибутов, в данном случае будем использовать координаты вершины в трехмерном пространстве (x, y, z) и трехмерный вектор нормали единичной длины. При построении модели предполагается, что модель одноцветна, т. е. вершины не содержат информацию о цвете, которая накладывается на модель позже. Все необходимые атрибуты передаются графическому процессору один раз перед рендерингом модели. Будем считать, что свет, падающий в точку, одинаково рассеивается по всем направлениям. Таким образом, освещенность определяется только плотностью света в точке поверхности, которая линейно зависит от косинуса угла падения в соответствии с уравнением диффузного освещения (см. [9]).

При визуализации результатов расчета основная задача заключается в том, чтобы задать формулы преобразования криволинейных координат оболочки в мировые (для разных типов оболочек эти формулы различны), которые учитывают сдвиги, совмещающие центр тяжести оболочки (или точки, близкой к центру тяжести) с началом мировой системы координат. При учете упомянутых сдвигов становится проще осуществлять вращение модели оболочки на экране компьютера во время ее графической визуализации. Мировые координаты в DirectX образуют левостороннюю систему координат и устроены следующим образом (см. рис. 1): ось x направлена вдоль экрана слева направо, ось y — вдоль экрана снизу вверх, а ось z перпендикулярна экрану и направлена вглубь от него. Криволинейные координаты индивидуальны для каждого вида оболочки, за исключением оси x^3 , которая всегда направлена по нормали к поверхности.

После построения модели срединной поверхности вершина модели верхней поверхности получается из вершины срединной поверхности движением по нормали на половину толщины. Нижняя поверхность симметрична верхней относительно срединной поверхности. Боковые грани получаются как заполнение верхней и нижней поверхностей по краям. Нормали верхней и нижней поверхностей равны нормальям срединной поверхности (с точностью до знака), а нормали боковых граней находятся на основе векторного произведения. Чтобы построить нормаль к вершине, необходимо вычислить произведение пар векторов, каждый из которых определяется как разность одной из соседних вершин и текущей. Так как у каждой вершины двумерной поверхности с декартовой сеткой имеется 8 соседних вершин, векторное произведение рассчитывается для каждого варианта, а в качестве результата берется среднее значение. Нормаль для крайних вершин устанавливается равной соседней не крайней вершине.

Для создания модели оболочки строится сетка на срединной поверхности, в которой количество узловых точек сетки вдоль криволинейных осей оболочки линейно зависит от размеров оболочки. При этом есть возможность задать функцию прогиба, которая возвращает его значение для конкретной точки в локальной системе координат. Помимо координат, такая сетка должна содержать величины прогибов, следовательно, элементом сетки является точка в трехмерном пространстве (x^1, x^2, x^3) , где (x^1, x^2) — координаты точки на оболочке, а x^3 — величина прогиба. Такой подход выбран из следующих соображений: в результате решения задачи о прогибах оболочки ответ получается в форме непрерывной функции (ее вид зависит от выбранной аппроксимации). В таком случае можно выбрать детальность сетки возле точки с учетом локальной кривизны. При построении оболочки с прогибами сначала формируется срединная поверхность без учета прогибов, затем верхняя и нижняя

поверхности путем движения по нормали от срединной поверхности на суммарную величину прогиба и половины толщины. Для цветового отображения поля прогибов и интенсивности напряжений на поверхности оболочки используется цветовая модель HSL (Hue, Saturation, Lightness), позволяющая оперировать всем спектром цветов при помощи одной выделенной переменной. Такой переменной может служить значение прогиба или интенсивности напряжений.

3. О визуализации некоторых тонких оболочек вращения. Рассмотрим схему построения цилиндрической оболочки. Будем считать, что для ее построения заданы следующие входные параметры: линейные размеры $l_i, i = 1, 2, 3$, радиус оболочки R_2 и ее толщина h . Ясно, что базовой моделью срединной поверхности оболочки является модель цилиндра, при этом криволинейная координата x^1 проходит по образующей, а криволинейная координата x^2 — по окружности, которая получается сечением цилиндра плоскостью, параллельной его основанию (рис. 2).

Параметрическое уравнение цилиндрической оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x^1 - (l_1 - l_0)/2, & x^1 &\in [l_0, l_1], \\ y &= R_2 \cos x^2 - R_2, & x^2 &\in [-l_2/2, l_2/2], \\ z &= -R_2 \sin x^2, \end{aligned}$$

где вычитание значений $(l_1 - l_0)/2$ и R_2 необходимо для того, чтобы центр тяжести оболочки (или точка, близкая к центру тяжести) совпадал с началом мировой системы координат. В таком случае становится проще осуществлять вращение модели оболочки при ее графической визуализации. Все соотношения для срединной поверхности цилиндрической оболочки приведены с учетом равенства радиуса кривизны $R_1 = \infty$.

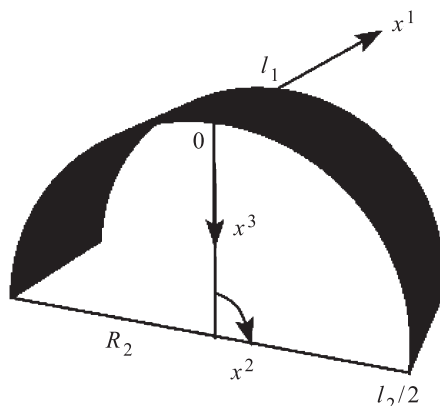


Рис. 2. Цилиндрическая оболочка

Для повышения жесткости конструкции тонкостенные оболочки подкрепляются ребрами, которые могут быть различной формы, однако, как правило, используются узкие ребра, так как жесткость конструкции в большей мере зависит от высоты подкрепляющих ребер.

Существуют различные способы дискретного введения ребер. Рассмотрим геометрию подкрепленной конструкции, для которой ребра жесткости вводятся с помощью метода конструктивной анизотропии для оболочек ступенчато-переменной толщины (см. [11]). Для них в усилиях и моментах присутствуют дополнительные

члены, учитывающие взаимное влияние изгибных и тангенциальных деформаций. В этом случае принимаются во внимание дискретное введение ребер, их высота и ширина, сдвиговая и крутильная жесткости, их жесткое соединение в местах пересечения. Деформирование всей конструкции описывается едиными соотношениями, справедливыми для всей области, занимаемой конструкцией. Со стороны вогнутости оболочка подкреплена ортогональной сеткой ребер, параллельных координатным линиям. Вообще говоря, ребра переменной жесткости могут вводиться неравномерно, а также под углом к координатным линиям. Пусть в направлении оси x^i , $i = 1, 2$, расположено n_i ребер шириной $r_k^i(x^j) = r_k^i(x^i, x^j)$, высотой $h_k^i(x^j) = h_k^i(x^i, x^j)$, где $k = 1, \dots, n_i, j = 1, 2$, причем числа i, j сопряжены равенством $i + j = 3$. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе. Пусть $H = H(x^1, x^2)$ — функция, характеризующая расположение и высоту ребер или глубину вырезов, которая задается при помощи разности единичных функций (подробнее см. [9, 13]). Тогда толщина всей конструкции равна $h + H$. Если $H > 0$, то оболочка подкреплена ребрами или накладками, а если $H < 0$, то она ослаблена вырезами. В разработанном программном модуле визуализации принято следующее предположение: ребра жесткости, подкрепляющие оболочку определенного типа, сами являются оболочками этого типа. Ясно, что при использовании такого подхода достаточно разработать только модель оболочки. Тогда ребра, подкрепляющие цилиндрическую оболочку, определяются параметрами $n_i, r_k^i, h_k^i, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2$. Изображение цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости со стороны вогнутости, с полным набором входных параметров $l_0, l_i, R_2, h, n_i, r_k^i, h_k^i, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2$, приведено на рис. 3, а. Заметим, что для визуализации оболочек, подкрепленных шпангоутами, можно применять ту же технику. Цилиндрическая оболочка, подкрепленная по параллелям шпангоутами с прямоугольными сечениями, изображена на рис. 3, б.

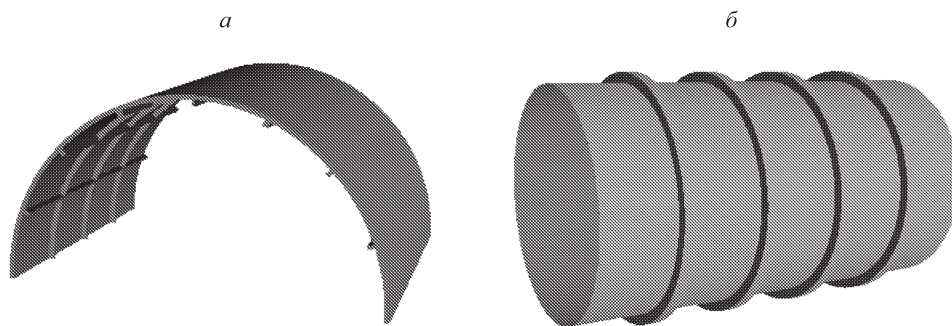


Рис. 3. Цилиндрическая оболочка, подкрепленная ребрами жесткости со стороны вогнутости (а) и шпангоутами с прямоугольными сечениями (б)

Катеноид имеет топологию цилиндра, являясь единственной минимальной поверхностью среди поверхностей вращения. Ввиду того, что модель срединной поверхности катеноидной оболочки можно построить на основе описанной выше модели цилиндрической оболочки, рассмотрим ребристую катеноидную оболочку, для создания которой используются следующие входные параметры: $l_0, l_i, h, n_i, r_k^i, h_k^i, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2, c \in \mathbb{R}$ — параметр соответствующей цепной линии, вращением которой получен этот катеноид. Параметрическое уравнение катеноидной оболочки имеет вид

$$\begin{aligned}
 x &= x^1 - \frac{l_1 - l_0}{2}, \\
 y &= c \operatorname{ch} \left(x^1 - \frac{l_1 - l_0}{2} \right) \cos x^2 - c, & x^1 \in [l_0, l_1], \\
 z &= -c \operatorname{ch} \left(x^1 - \frac{l_1 - l_0}{2} \right) \sin x^2, & x^2 \in [-l_2/2, l_2/2],
 \end{aligned}$$

где, аналогично предыдущему, вычитание значений $(l_1 - l_0)/2$ с необходимо для того, чтобы центр тяжести пришелся на начало мировой системы координат. Изображение катеноидной оболочки, подкрепленной пятью продольными и семью поперечными ребрами, приведено на рис. 4.

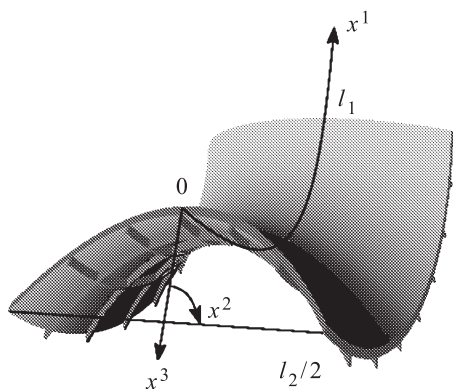


Рис. 4. Ребристая катеноидная оболочка

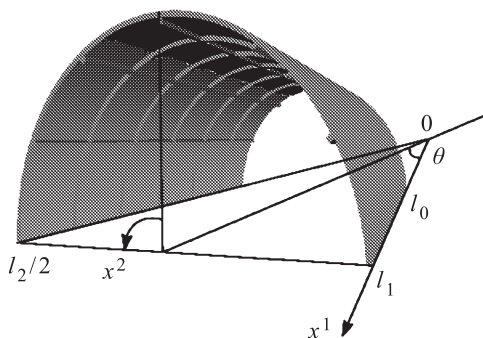


Рис. 5. Ребристая коническая оболочка

Известно, что при исследовании устойчивости конической оболочки с малым углом конусности ее можно свести к цилиндрической [14], принимая за радиус цилиндрической оболочки среднее между большим и малым радиусами конической оболочки. Однако при увеличении угла конусности использование такого подхода некорректно. Для построения ребристой конической оболочки будем применять следующие входные параметры: $l_0, l_1, h, n_i, r_k^i, h_k^i, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \theta \in (0, \pi/2)$ — угол конусности. Модель срединной поверхности описывается таким образом. Криволинейная координата x^1 проходит по образующей, а криволинейная координата x^2 — по окружности, которая получается сечением конуса плоскостью, параллельной его основанию. Тогда параметрическое уравнение конической оболочки можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 x &= x^1 \cos \theta - (l_0 + l_1)/2, & x^1 \in [l_0, l_1], \\
 y &= x^1 \sin \theta \cos x^2, & x^2 \in [-l_2/2, l_2/2], \\
 z &= -x^1 \sin \theta \sin x^2,
 \end{aligned}$$

где, аналогично предыдущим замечаниям, вычитание слагаемого $(l_0 + l_1)/2$ необходимо для того, чтобы центр тяжести пришелся на начало мировой системы координат. Коническая оболочка, подкрепленная пятью ребрами в каждом направлении, изображена на рис. 5.

4. О визуализации напряженно-деформированного состояния. В разработанном программном модуле геометрическая форма оболочки задается при помощи

параметров Ламе, а сама оболочка и подкрепляющие ее ребра рассматриваются как оболочка ступенчато-переменной толщины. Это существенно упрощает подготовку задачи к решению. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе, что более точно отражает реальную работу конструкции. Для построения математической модели деформирования тонких оболочек вращения использовалась теория Тимошенко–Рейсснера (модель второго приближения), учитывающая сдвиг в отличие от классической модели Кирхгофа–Лява, которая может приводить к погрешностям порядка h/R , где h — толщина оболочки, а R — ее характерный размер. В рассматриваемой теории математическая модель деформирования тонких оболочек, подкрепленных ребрами переменной высоты, в нелинейной постановке (геометрическая и физическая нелинейности) с учетом поперечных сдвигов, сдвиговой и крутильной жесткостей ребер состоит из геометрических соотношений (связь деформаций и перемещений), физических соотношений (связь напряжений и деформаций), краевых условий (выбираются в зависимости от способа закрепления контура конструкции) и функционала полной энергии деформации оболочки, представляющего собой сумму работ внутренних и внешних сил, состоящего из деформаций, усилий и моментов (подробнее см. [11]), который кратко можно записать в следующем виде:

$$\Phi = \int_{l_0}^{l_1} \int_0^{l_2} F(U, V, W, \Psi_1, \Psi_2, q) A_1 A_2 dx^1 dx^2,$$

где $U = U(x^1, x^2)$, $V = V(x^1, x^2)$, $W = W(x^1, x^2)$ — неизвестные функции перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x^1, x^2, x^3 соответственно; $\Psi_i = \Psi_i(x^1, x^2)$ — неизвестные функции углов поворота нормали в плоскости $x^i O x^3$; $A_i = A_i(x^i)$ — параметр Ламе вдоль оси x^i , $i = 1, 2$; $q = q(x^1, x^2)$ — нагрузка. Краевые условия выбираются в зависимости от способа закрепления контура оболочки: шарнирно-неподвижное закрепление, жесткая заделка, свободный край или их комбинация.

При исследовании устойчивости оболочек нагрузка последовательно увеличивается от некоторого начального значения до критической величины и строится кривая «нагрузка–прогиб» в одной из характерных точек (например, в центре оболочки или в точке с максимальным прогибом). Нагрузка, соответствующая максимуму этой кривой, принимается за критическую. При такой нагрузке происходит перескок на новое равновесное состояние. Для нахождения первой критической нагрузки используется алгоритм, основанный на применении метода Рунге к функционалу полной энергии деформации оболочки. Аппроксимацию неизвестных функций $U(x^1, x^2)$, $V(x^1, x^2)$, $W(x^1, x^2)$, $\Psi_i(x^1, x^2)$ будем искать в виде линейной комбинации неизвестных числовых параметров u_j, v_j, w_j, ψ_{ij} и известных аппроксимирующих функций $u(x^1, x^2, j)$, $v(x^1, x^2, j)$, $w(x^1, x^2, j)$, $\psi_i(x^1, x^2, j)$, удовлетворяющих заданным краевым условиям:

$$U(x^1, x^2) = \sum_{j=1}^n u_j u(x^1, x^2, j), \quad V(x^1, x^2) = \sum_{j=1}^n v_j v(x^1, x^2, j),$$

$$W(x^1, x^2) = \sum_{j=1}^n w_j w(x^1, x^2, j), \quad \Psi_i(x^1, x^2) = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} \psi_i(x^1, x^2, j),$$

где $i = 1, 2$, а n — количество членов разложения (приближение по методу Рунге).

После применения метода Рунге получим систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом итераций (на первом шаге задача считается линейной). Кратко данную систему уравнений можно представить в следующем виде (подробнее см. [11]):

$$\Phi_{\text{л}}(x) + \alpha q = \Phi_{\text{гн}}(x) + \Phi_{\text{фн}}(x),$$

здесь x — искомый вектор неизвестных числовых параметров $x = (u_j, v_j, w_j, \psi_{1j}, \psi_{2j})$; $\Phi_{\text{л}}(x)$ — вектор, состоящий из линейной части системы уравнений; $\Phi_{\text{гн}}(x)$ и $\Phi_{\text{фн}}(x)$ — части системы, отвечающие за геометрическую и физическую нелинейности; α — некоторый числовой параметр; q — вектор нагрузки $q = (0, 0, q(x^1, x^2), 0, 0)$.

При некоторой заданной нагрузке вначале решается геометрически линейная задача

$$\Phi_{\text{л}}(x) + \alpha q = 0.$$

Найденное значение решения x подставляется в нелинейный член $\Phi_{\text{гн}}(x)$, и методом итераций решается геометрически нелинейная задача

$$\Phi_{\text{л}}(x_i) + \alpha q = \Phi_{\text{гн}}(x_{i-1}).$$

Далее значение решения геометрически нелинейной задачи является начальным приближением для решения геометрически и физически нелинейной задачи

$$\Phi_{\text{л}}(x_i) + \alpha q = \Phi_{\text{гн}}(x_{i-1}) + \Phi_{\text{фн}}(x_{i-1}).$$

Процесс итераций позволяет достаточно точно находить критическую нагрузку при надлежащем выборе числа разложений искомых функций в ряды. Итерационный процесс заканчивается, когда величины прогибов на предыдущей и последующей итерациях практически совпадают. Нагрузка, при которой процесс итераций расходится, принимается за критическую. Указанный алгоритм довольно прост в программной реализации и допускает распараллеливание вычислений [3], однако по такому алгоритму закритическое поведение конструкции исследовать невозможно. В этом случае можно использовать более трудоемкие алгоритмы, например метод продолжения решения по наилучшему параметру, позволяющий находить несколько критических нагрузок, если они существуют, так что можно определить критические нагрузки, соответствующие местной форме потери устойчивости и общей. Известны также и другие теории оболочек. Так, при исследовании закритического поведения подкрепленных оболочек следует учитывать, что оболочка меняет свою форму, и тогда в упомянутом выше функционале полной энергии деформации оболочки каждый раз нужно применять новые параметры Ламе и кривизны. В этом случае целесообразно использовать теорию Палия–Спиро [15], учитывающую влияние поперечного сдвига, деформирование в направлении нормали к срединной поверхности и изменение толщины оболочки.

После того, как при заданном параметре нагрузки найдено напряженно-деформированное состояние оболочки, для исследования прочности пластичных материалов анализируется предельное упругое состояние с помощью энергетического критерия прочности Хубера–Мизеса–Генки, а для анализа хрупких материалов (например, бетона) используется критерий Кулона–Мора (подробнее см. [16]).

Часто при отображении оболочки с наложенным полем прогибов, особенно до потери конструкцией устойчивости, значения прогибов настолько малы, что их достаточно трудно заметить. Тем не менее даже малозаметные изменения в конструкции могут нести в себе важную информацию о ее состоянии. В связи с этим в разработанном программном модуле введен коэффициент масштабирования прогиба, который

обозначается через κ . Если размер прогиба больше либо равен толщине оболочки, то коэффициент принимается равным единице. Если же прогиб небольшой, то пользователь может самостоятельно плавно изменять коэффициент непосредственно в интерфейсе программы. В программном модуле имеется также возможность просмотра анимации с процессом деформирования оболочки, которая позволяет автоматически отображать плавное изменение коэффициента масштабирования κ от единицы до значения, заданного пользователем.

Рассмотрим длинную панель шарнирно-неподвижно закрепленной по контуру цилиндрической оболочки, находящуюся под воздействием наружной равномерно-распределенной поперечной нагрузки. Оболочка выполнена из стали с модулем упругости $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0.3$. Оболочка задается следующими величинами: линейный размер $l_1 = 20$ м, угол разворота $l_2 = \pi$ рад, радиус кривизны $R_2 = 5.4$ м, толщина $h = 0.01$ м. Оболочка со стороны вогнутости в каждом направлении подкреплена тремя ребрами жесткости высотой $3h$ и шириной $2h$. На рис. 6 представлен график «нагрузка q — максимальный прогиб W ». При подкреплении гладкой оболочки ребрами критическая нагрузка существенно увеличивается.

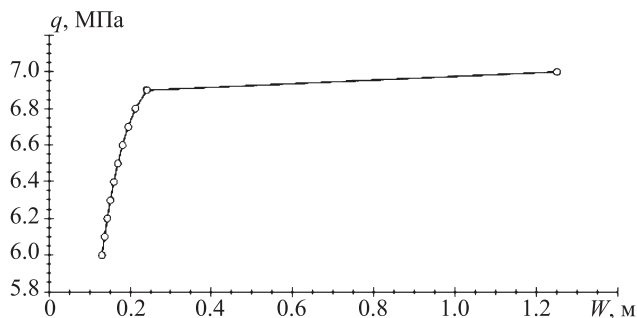


Рис. 6. Зависимость нагрузки q от величины максимального прогиба W

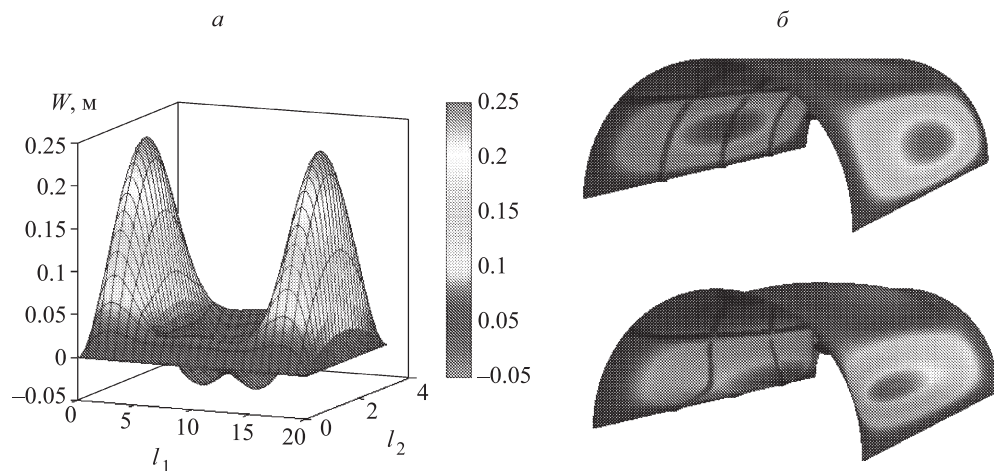


Рис. 7. Поле прогибов цилиндрической оболочки, отложенное от плоскости, на поверхности оболочки и от поверхности оболочки

Объяснение в тексте.

На рис. 7, *а* показано поле прогибов оболочки до потери устойчивости, на рис. 7, *б* сверху изображено поле прогибов на оболочке, снизу — на поверхности оболочки, а также форма прогиба, отложенная от поверхности оболочки ($\kappa = 10$).

На рис. 8, *а* приведен график интенсивности напряжений до потери устойчивости, на рис. 8, *б* сверху интенсивность напряжений изображена на поверхности оболочки, снизу совместно показана интенсивность напряжений на поверхности оболочки и форма прогибов, отложенная от поверхности оболочки.

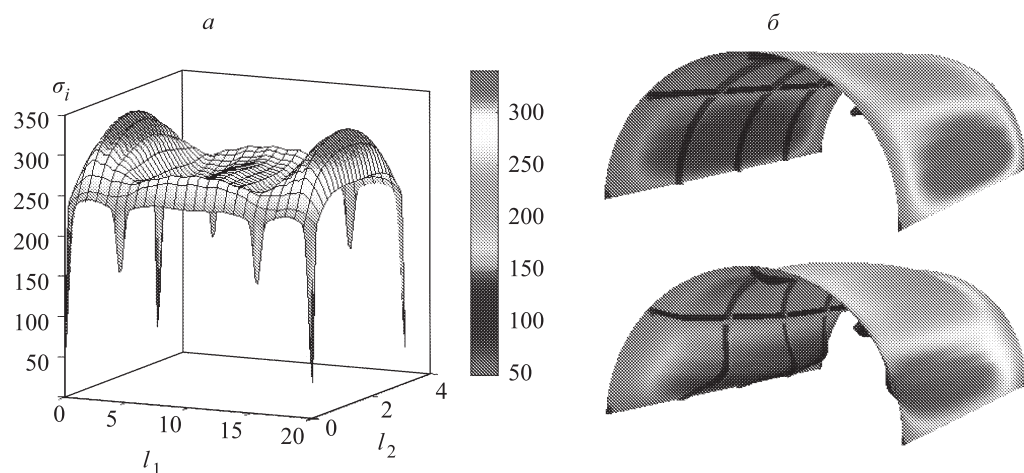


Рис. 8. Интенсивность напряжений
Объяснение в тексте.

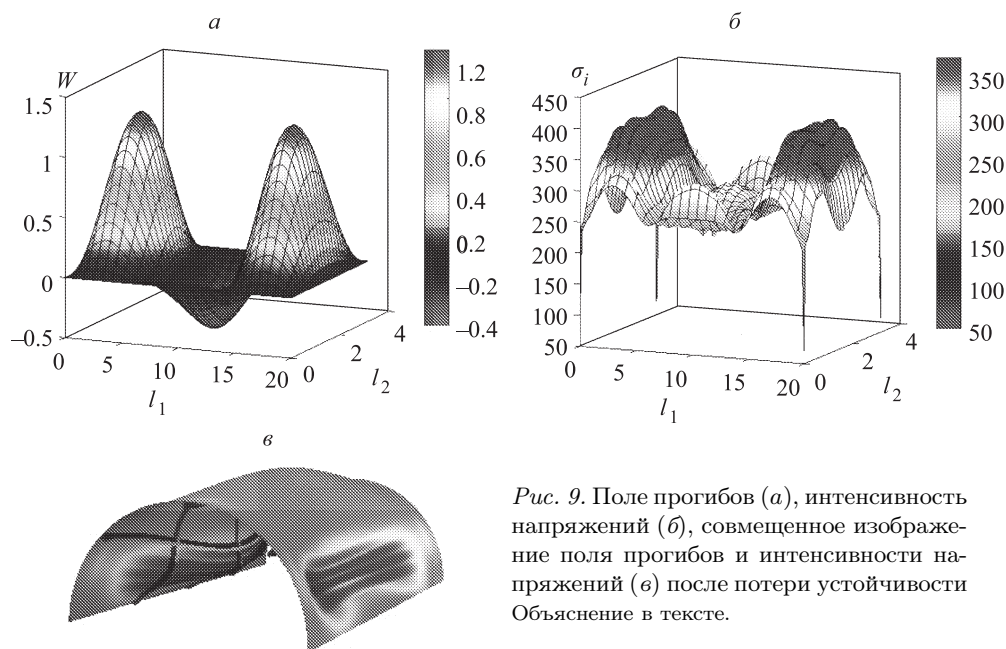


Рис. 9. Поле прогибов (*а*), интенсивность напряжений (*б*), совмещенное изображение поля прогибов и интенсивности напряжений (*в*) после потери устойчивости
Объяснение в тексте.

Рисунок 9, *а-в* иллюстрирует поле прогибов оболочки после потери устойчивости, график интенсивности напряжений после потери устойчивости и совмещенное

изображение поля прогибов, отложенного от поверхности оболочки ($\kappa = 1$) и интенсивности напряжений, изображенной на поверхности оболочки.

5. Заключение. Используемые в коммерческих программных комплексах алгоритмы скрыты от пользователя, что затрудняет эффективное и полное применение встроенных функций. При этом могут возникать сложности с заданием геометрической формы оболочек и подкрепляющих ее ребер. Представленные на рис. 6–9 результаты показывают, что визуализация математической модели напряженно-деформированного состояния ребристых тонкостенных оболочечных конструкций, полученная при помощи разработанного программного модуля, в удобном инженеру виде наглядно отражает напряженно-деформированное состояние тонких оболочек: форму оболочки, анимированный процесс деформации, кривую «нагрузка–прогиб» с возможностью выбора одной из характерных точек, поле прогибов и поле интенсивности напряжений как от плоскости, так и от самой оболочки (с возможностью их совместного отображения), при этом коэффициент масштабирования прогиба позволяет отследить влияние нагрузки на состояние конструкции. Предложенный программный модуль может быть использован при проектировании и расчете тонкостенных оболочечных конструкций, подкрепленных ребрами переменной высоты, в научных исследованиях, связанных с нелинейными проблемами деформирования тонкостенных конструкций, их визуализации и анимации процессов деформирования, а также для анализа приближенных решений, полученных коммерческими программными продуктами для инженерных расчетов.

Авторы благодарят рецензентов, ценные замечания которых были учтены при составлении окончательного текста.

Литература

1. Kiendl J., Schmidt R., Wuchner R., Bletzinger K.-U. Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2014. Vol. 274. P. 148–167.
2. Макаров А. А. Матрицы добавления и удаления узлов для неполиномиальных сплайнов // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. Т. 13. С. 74–86.
3. Макаров А. А. Расчет прочности и устойчивости подкрепленных оболочек и распараллеливание // *Труды молодых ученых: сб. тез. докл. конференции молодых ученых. Вып. 1 / гл. ред. В. О. Никифоров*. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т ИТМО, 2011. С. 272.
4. Голованов Н. Н., Ильютко Д. П., Носовский Г. В., Фоменко А. Т. Компьютерная геометрия. М.: Издат. центр «Академия», 2006. 511 с.
5. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. М.: Издат. центр «Академия», 2011. 272 с.
6. Волошинов Д. В. Использование методов геометрического моделирования для автоматизированного проектирования и исследования сложных технических поверхностей // *Науч.-техн. ведомости С.-Петерб. политех. ун-та*. 2006. № 44. С. 152–157.
7. Филиппов В. А. Основы геометрии поверхностей оболочек пространственных конструкций. М.: Физматлит, 2009. 191 с.
8. Беляева З. В., Митюшов Е. А. Геометрическое моделирование пространственных конструкций // *Вестн. Томск. гос. архит.-строит. ун-та*. 2010. № 1 (26). С. 53–63.
9. Асеев А. В., Макаров А. А. О визуализации элементов подкрепленных тонкостенных оболочек // *Компьютерные инструменты в образовании*. 2014. № 2. С. 35–45.
10. Nguyen-Thanh N., Valizadeh N., Nguyen M. N., Nguyen-Xuan H., Zhuang X., Areias P., Zi G., Bazilevs Y., De Lorenzis L., Rabczuk T. An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2015. Vol. 284. P. 265–291.
11. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.

12. Асеев А. В., Макаров А. А., Семенов А. А. Визуализация напряженно-деформированного состояния тонкостенных ребристых оболочек // Вестн. гражданских инженеров. 2013. № 3 (38). С. 226–232.
13. Москаленко Л. П. Эффективность подкрепления пологих оболочек ребрами переменной высоты // Вестн. гражданских инженеров. 2011. № 3 (28). С. 46–50.
14. Преображенский И. Н., Грицак В. З. Устойчивость и колебания конических оболочек. М.: Машиностроение, 1986. 240 с.
15. Паллий О. М., Спиро В. Е. Анизотропные оболочки. Теория и расчет. Л.: Судостроение, 1977. 386 с.
16. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. 512 с.

Для цитирования: Асеев А. В., Макаров А. А. О визуализации некоторых тонких оболочек и их напряженно-деформированного состояния // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 18–31. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.302

References

1. Kiendl J., Schmidt R., Wuchner R., Bletzinger K.-U. Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2014, vol. 274, pp. 148–167.
2. Makarov A. A. Matricy dobavleniya i udaleniya uzlov dlya nepolinomial'nyh splajnov [Knot insertion and knot removal matrices for nonpolynomial splines]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye [Numerical methods and programming]*, 2012, vol. 13, pp. 74–86. (In Russian)
3. Makarov A. A. Raschet prochnosti i ustojchivosti podkreplennykh obolochek i rasparallelivaniye [Calculation of the strength and stability of reinforced membranes and parallelization]. *Trudy molodykh uchenykh: Sb. tez. dokl. konferencii molodykh uchenykh [Abstracts of the conference of young scientists]*, vol. 1. Saint Petersburg, ITMO University Publ., 2011, pp. 272. (In Russian)
4. Golovanov N. N., Il'yutko D. P., Nosovskij G. V., Fomenko A. T. *Komp'yuternaya geometriya [Computational geometry]*. Moscow, Academia Publ., 2006, 511 p. (In Russian)
5. Golovanov N. N. *Geometricheskoe modelirovaniye [Geometric modeling]*. Moscow, Academia Publ., 2011, 272 p. (In Russian)
6. Voloshinov D. V. Ispol'zovanie metodov geometricheskogo modelirovaniya dlya avtomatizirovannogo proektirovaniya i issledovaniya slozhnykh tekhnicheskikh poverhnostey [Using of geometric modeling for computer-aided design and research of complex technical surfaces]. *Nauch.-tekhn. vedomosti S.-Peterb. politekh. un-ta [St. Petersburg State Polytechnical University Journal]*, 2006, no. 44, pp. 152–157. (In Russian)
7. Filippov V. A. *Osnovy geometrii poverhnostey obolochek prostranstvennykh konstrukcij [Basics of geometry of surfaces of shells of spatial structures]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 191 p. (In Russian)
8. Belyaeva Z. V., Mityushov E. A. Geometricheskoe modelirovaniye prostranstvennykh konstrukcij [Geometric modeling of spatial structures]. *Vestn. Tomsk. gos. arhitek.-stroit. un-ta [Vestnik TSUAB]*, 2010, no. 1 (26), pp. 53–63. (In Russian)
9. Aseev A. V., Makarov A. A. O vizualizacii ehlementov podkreplennykh tonkostennykh obolochek [On visualisation of reinforced thin shell elements]. *Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii [Computer Tools in Education]*, 2014, no. 2, pp. 35–45. (In Russian)
10. Nguyen-Thanh N., Valizadeh N., Nguyen M. N., Nguyen-Xuan H., Zhuang X., Areias P., Zi G., Bazilevs Y., De Lorenzis L., Rabczuk T. An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff-Love theory. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2015, vol. 284, pp. 265–291.
11. Karpov V. V. *Prochnost' i ustojchivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya. Part 1: Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustojchivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya [The strength and stability of reinforced shells of revolution. Part 1: Models and algorithms for research of strength and stability of reinforced shells of revolution]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 288 p. (In Russian)
12. Aseev A. V., Makarov A. A., Semenov A. A. Vizualizaciya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tonkostennykh rebristyykh obolochek [Visualization of stress-strain state of thin-walled ribbed shells]. *Vestn. grazhdanskih inzhenerov [Bulletin of Civil Engineers]*, 2013, no. 3 (38), pp. 226–232. (In Russian)
13. Moskalenko L. P. Effektivnost' podkrepleniya plogikh obolochek rebrami peremennoj vysoty [Efficiency of the reinforcement of flat shells edges with ribs of variable height]. *Vestn. grazhdanskih inzhenerov [Bulletin of Civil Engineers]*, 2011, no. 3 (28), pp. 46–50. (In Russian)

14. Preobrazhenskij I. N., Grishchak V. Z. *Ustojchivost' i kolebaniya konicheskikh obolochek* [Stability and oscillations of conical shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986, 240 p. (In Russian)

15. Palij O. M., Spiro V. E. *Anizotropnye obolochki v sudostroenii. Teorija i raschet* [Anisotropic membranes in shipbuilding. Theory and evaluation]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1977, 386 p. (In Russian)

16. Bezuhov N. I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1968, 512 p. (In Russian)

For citation: Aseev A. V., Makarov A. A. On visualization of some thin shells and their stress-strain state. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2016, issue 3, pp. 18–31. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.302

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 18 февраля 2016 г.

Статья принята к печати 26 мая 2016 г.